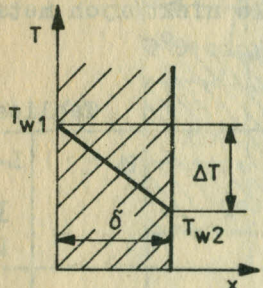
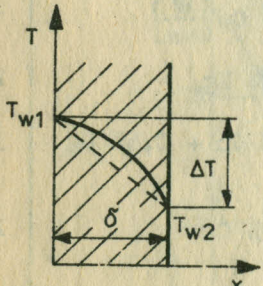


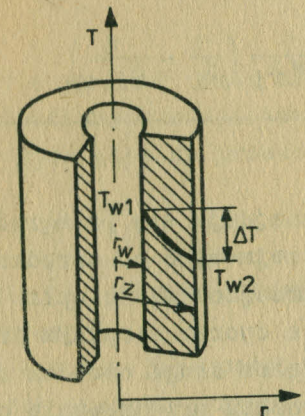
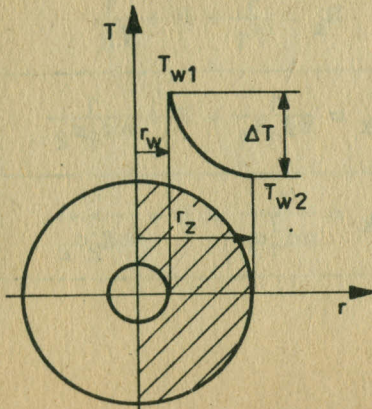
5. PRZEWODZENIE CIEPŁA

5.1. Przewodzenie ciepła w stanie ustalonym

5.1.1. Przewodzenie ciepła w układach jednowymiarowych

Tablica 5.1

Układ	Pole temperatury, strumień ciepły i opór cieplny przewodzenia
<p>1. Ścianka płaska ($\lambda = \text{const}$)</p> 	$T(x) = T_{w1} - \Delta T \frac{x}{\delta} = T_{w1} - \frac{q}{\lambda} x$ $q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}) = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \frac{\delta}{\lambda}$
<p>2. Ścianka płaska; przewodność cieplna materiału zależy liniowo od temperatury $\lambda = \lambda_0(1 + b T)$</p> 	$T(x) = \frac{1}{b} \left[\sqrt{\left(\frac{\lambda_{w1}}{\lambda_0} \right)^2 - \frac{2 b q}{\lambda_0} x} - 1 \right]$ $q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} \lambda_0 \left(1 + b \frac{T_{w1} + T_{w2}}{2} \right) =$ $= \frac{\lambda_m}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}) = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \frac{\delta}{\lambda_m} = \frac{\delta}{\lambda_0 \left(1 + b \frac{T_{w1} + T_{w2}}{2} \right)}$
<p>3. Ścianka płaska wielowarstwowa; n warstw o grubościach δ_i i stałych przewodnościach cieplnych λ_i.</p>	$q = \frac{T_{w1} - T_{w,n+1}}{R} = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$

Układ	Pole temperatury, strumień ciepły i opór cieplny przewodzenia
<p>4. Ścianka cylindryczna ($\lambda = \text{const}$)</p> 	$T(r) = T_{w1} - \Delta T \frac{\ln \frac{r}{r_w}}{\ln \frac{r_z}{r_w}}$ <p>Ciepło przewodzenia przez ściankę cylindryczną o długości 1 m</p> $Q_1 = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R} = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_z}{d_w}$
<p>5. Ścianka cylindryczna wielowarstwowa; n warstw o średnicach d_i i stałych przewodnościach cieplnych λ_i</p>	$Q_1 = \frac{T_{w1} - T_{w,n+1}}{R} = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}{2\pi\lambda_i}$
<p>6. Ścianka kulista ($\lambda = \text{const}$)</p> 	$T(r) = T_{w1} - \Delta T \frac{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_z}}$ $Q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R} = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{d_w} - \frac{1}{d_z} \right)$

Układ	Pole temperatury, strumień ciepły i opór cieplny przewodzenia
7. Ścianka kulista wielowarstwowa n warstw o średnicach d_i i stałych przewodnościach λ_i	$Q = \frac{T_{w1} - T_{w,n+1}}{R} = \frac{\Delta T}{R}$ $R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\pi\lambda_i} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right)$

5.1.2. Opory cieplne przenikania

Pomiędzy dwoma ośrodkami płynnymi znajduje się przegroda stała przewodząca ciepło. Ciepło Q przejmowane od ośrodka o temperaturze T_{f1} przy współczynniku przejmowania ciepła α_1 jest przewodzone dalej przez przegrodę o oporze cieplnym przewodzenia R , a następnie przejmowane przez drugi ośrodek o temperaturze T_{f2} ($< T_{f1}$) przy współczynniku przejmowania ciepła α_2 :

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_k}.$$

Tablica 5.2

Układ	Opór cieplny przenikania
Przegroda płaska	$R_k = \frac{1}{\alpha_1} + R + \frac{1}{\alpha_2}$
Przegroda cylindryczna	$R_k = \frac{1}{\pi d_1 \alpha_1} + R + \frac{1}{\pi d_2 \alpha_2}$
Przegroda kulista	$R_k = \frac{1}{\pi d_1^2 \alpha_1} + R + \frac{1}{\pi d_2^2 \alpha_2}$

5.1.3. Opory cieplne przewodzenia różnych układów geometrycznych

Ciepło przewodzone przez układ

$$Q = \frac{\Delta T}{R},$$

przy czym ΔT jest efektywną różnicą temperatur (mierzoną w określonych miejscach).

Opór cieplny przewodzenia

$$R = \frac{1}{\lambda S},$$

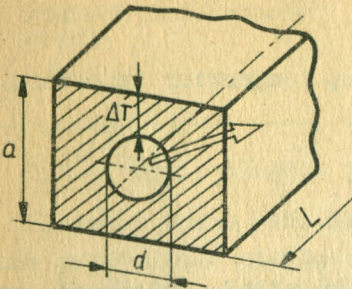
gdzie S jest współczynnikiem kształtu układu (wielkość geometryczna).

W tabl. 5.3. podano opory cieplne przewodzenia różnych układów geometrycznych. Na rysunkach pokazano kierunek przewodzenia ciepła przez jednorodny ośrodek o stałej przewodności cieplnej λ (obszary zakreskowane) i efektywną różnicę temperatur ΔT , T_e oznacza temperaturę w miejscach dostatecznie oddalonych od powierzchni o wyższej temperaturze (w nieskończoności oraz w pewnych przypadkach jednocześnie temperaturę zewnętrzną powierzchni izotermicznych). Powierzchnie podanych układów są zawsze powierzchniami izotermicznymi. W przypadku układów półnieskończonych lub nieskończonych rozważany jest odcinek układu o długości L .

Układ przewodzący ciepło

Opór cieplny przewodzenia

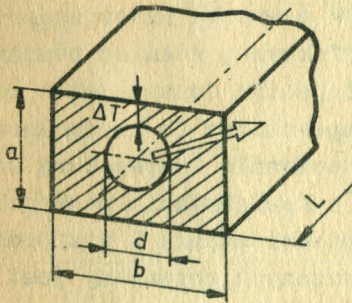
1. Pręt kwadratowy z symetrycznie położonym okrągłym otworem (nieskończenie długi)



$$R = \frac{\ln 1,08 a/d}{2\pi L \lambda}$$

Uwaga: długość L oznacza tutaj (i poniżej) długość rozważanego odcinka pręta nieskończenie długiego.

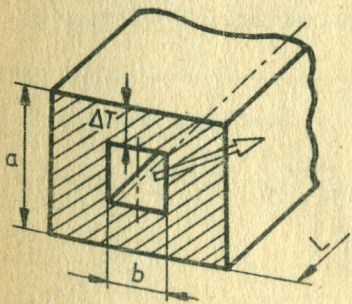
2. Pręt prostokątny z symetrycznie położonym okrągłym otworem (nieskończenie długi)



$$R = \frac{\ln \frac{4a}{\pi d} - 2K}{2\pi L \lambda}$$

b/a	1,0	1,25	1,50	1,75
K	0,08290	0,03963	0,01781	0,00816
b/a	2,0	2,50	3,00	∞
K	0,00373	0,00078	0,00016	0

3. Pręt kwadratowy z symetrycznie położonym kwadratowym otworem (nieskończenie długi)



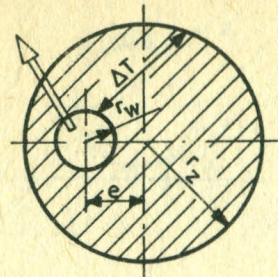
$$R = \frac{a-b}{8 b L \lambda} \cdot \frac{1}{\varphi}$$

$\frac{a-b}{b}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
φ	0,815	0,889	0,906	0,941	1

Układ przewodzący ciepło

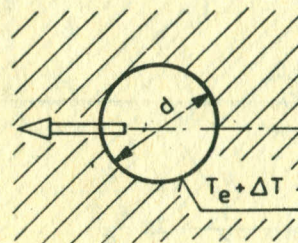
Opór cieplny przewodzenia

4. Nieskończenie długi pręt cylindryczny z mimośrodowo położonym otworem



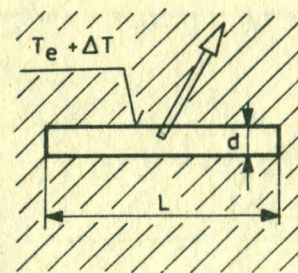
$$R = \frac{\operatorname{arcosh} \frac{r_z^2 + r_w^2 - e^2}{2 r_w r_z}}{2\pi L \lambda}$$

5. Kula w nieskończonym ośrodku



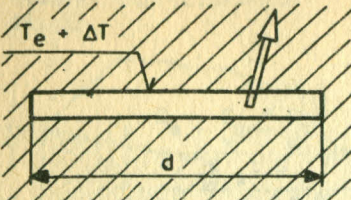
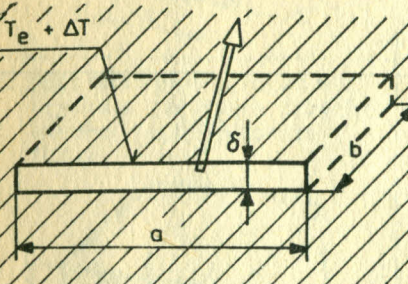
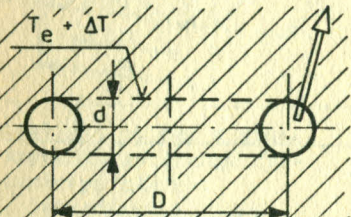
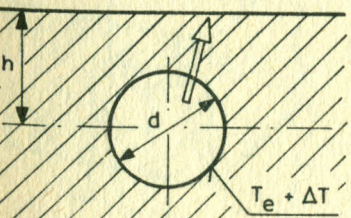
$$R = \frac{1}{2\pi d \lambda}$$

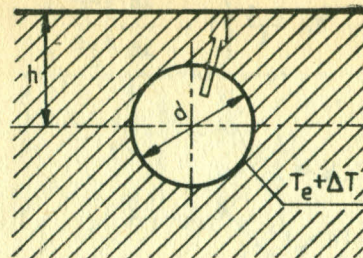
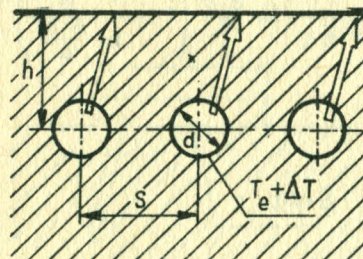
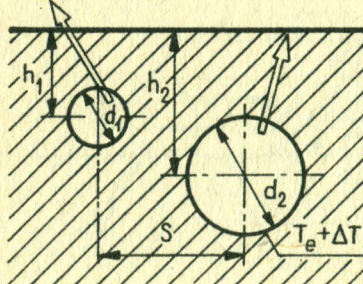
6. Pręt walcowy w nieskończonym ośrodku

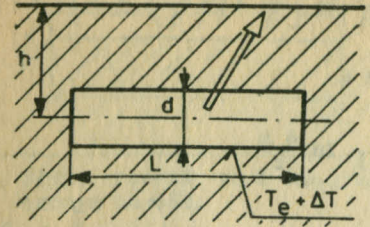
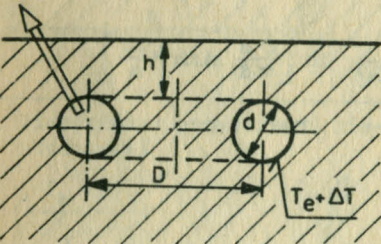
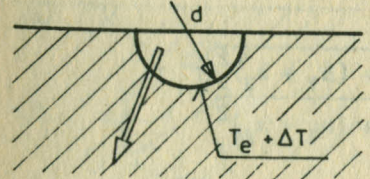


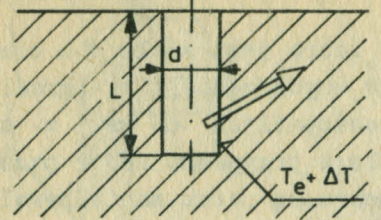
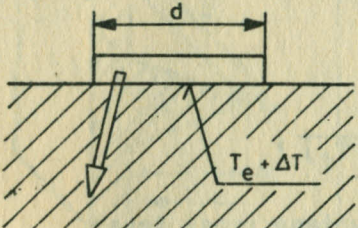
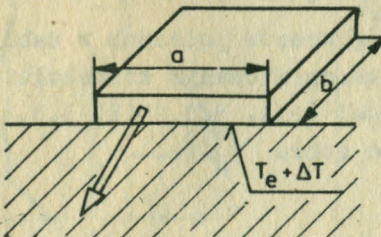
$$R = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln \frac{2L}{d};$$

$$d \ll L$$

Układ przewodzący ciepło	Opór cieplny przewodzenia
<p>7. Płyta okrągła w nieskończonym ośrodku</p> 	$R = \frac{1}{4 d \lambda}$
<p>8. Płyta prostokątna w nieskończonym ośrodku</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi a \lambda} \ln \frac{4 a}{b} ;$ $\delta \ll b, b \ll a$
<p>9. Pierścieni w przestrzeni nieskończonej</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi^2 D \lambda} \ln \frac{8 D}{d} ;$ $d \ll D$
<p>10. Kula w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi d \lambda} \left(1 + \frac{d}{4h} \right)$

Układ przewodzący ciepło	Opór cieplny przewodzenia
<p>11. Otwór walcowy w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi L \lambda} \ln \left[\frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d} \right)^2 - 1} \right] ;$ <p>dla $h > 2 d$</p> $R = \frac{1}{2 \pi L \lambda} \ln \frac{4 h}{d}$
<p>12. Rząd otworów w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi L \lambda} \ln \left[\frac{2 s}{\pi d} \sinh \frac{2 \pi h}{s} \right]$
<p>13. Dwa otwory w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2 \pi L \lambda} \frac{\ln \frac{4 h_1}{d_1} \ln \frac{4 h_2}{d_2} + (\ln B)^2}{\ln \frac{4 h_2}{d_2} - \ln B}$ $B = \sqrt{\frac{s^2 + (h_1 + h_2)^2}{s^2 + (h_1 - h_2)^2}}$

Układ przewodzący ciepło	Opór cieplny przewodzenia
<p>14. Walec w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2\pi L\lambda} \ln \frac{2L}{d} \left(1 + \frac{\ln \frac{L}{2h}}{\ln \frac{2L}{d}} \right)$ <p>$d \ll h; \quad h \ll L$</p>
<p>15. Pierścień w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{2\pi^2 D\lambda} \ln \frac{8D}{d} \left(1 + \frac{\ln \frac{2D}{h}}{\ln \frac{8D}{d}} \right)$ <p>$d \ll h; \quad h \ll D$</p>
<p>16. Półkula w ośrodku półnieskończonym</p> 	$R = \frac{1}{\pi d \lambda}$

Układ przewodzący ciepło	Opór cieplny przewodzenia
<p>17. Walec w ośrodku półograniczonym</p> 	$R = \frac{1}{2\pi L\lambda} \ln \frac{4L}{d};$ <p>$d \ll L$</p>
<p>18. Płyta okrągła na powierzchni ośrodka półnieskończonego</p> 	$R = \frac{1}{2d\lambda}$
<p>19. Płyta prostokątna na powierzchni ośrodka półnieskończonego</p> 	$R = \frac{1}{\pi a\lambda} \ln \frac{4a}{b};$ <p>$b < a$</p>

5.1.4. Przewodzenie ciepła przez żebra

Podane poniżej wzory i wykresy odnoszą się do takich warunków przewodzenia ciepła przez żebro, przy których mogą być przyjęte następujące uproszczenia:

- temperatura płynu otaczającego żebro jest stała $T_f = \text{const}$,
- współczynnik przejmowania ciepła na całej powierzchni żebra jest stały $\alpha = \text{const}$,
- przewodność cieplna materiału żebra jest stała $\lambda = \text{const}$,
- temperatura jest tylko funkcją współrzędnej x (gradienty temperatur w kierunkach prostopadłych do osi x są pomijalnie małe); straty ciepła w przypadku żeber prostych przez krawędzie boczne żebra są zatem zanedbywalnie małe,
- wymiana ciepła na powierzchni czołowej żebra jest pominięta.

Wpływ wymiany ciepła na powierzchni czołowej żebra można uwzględnić dla żeber o przekroju prostokątnym, wstawiając we wzorach zamiast rzeczywistej wysokości żebra L efektywną wysokość żebra $(L + \frac{\delta}{2})$.

Sprawność żebra

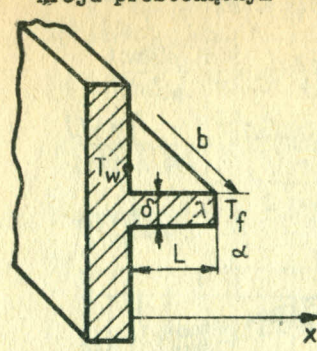
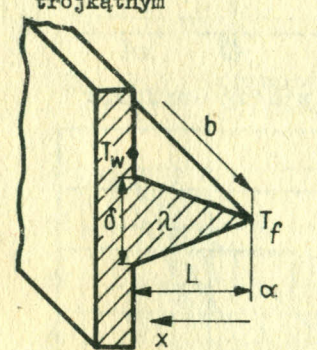
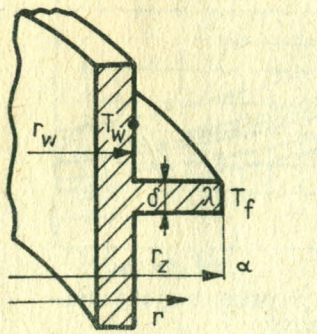
$$\eta_z = \frac{Q_h}{Q_{oh}} = \frac{Q_h}{F_z \alpha (T_w - T_f)},$$

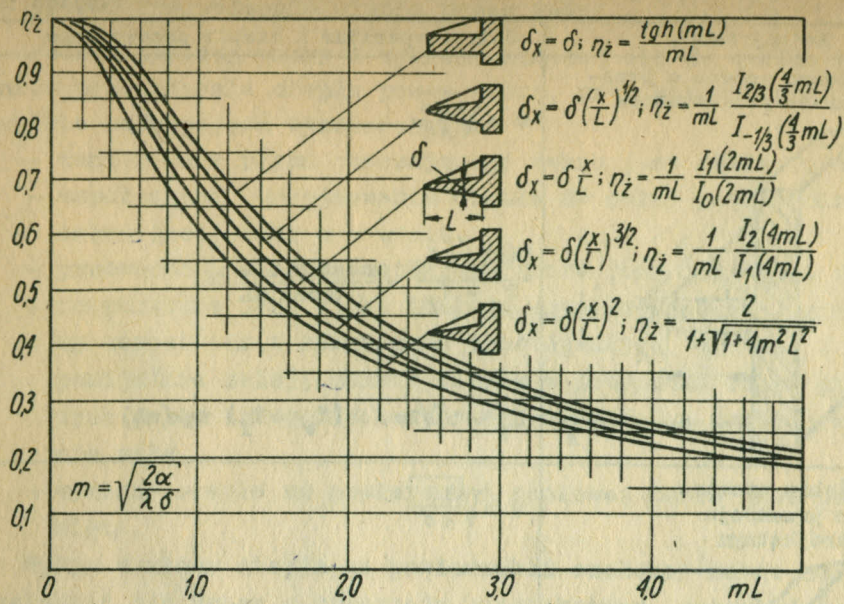
- gdzie: Q_h - ciepło rzeczywiste wymieniane przez żebro,
 Q_{oh} - ciepło, które byłoby wymieniane przez to samo żebro, gdyby materiał żebra miał przewodność nieskończenie wielką;
 F_z - powierzchnia zewnętrzna żebra, na której wymieniane jest ciepło z otaczającym płynem.

Ciepło Q_h można obliczyć według wzorów podanych w tabl.

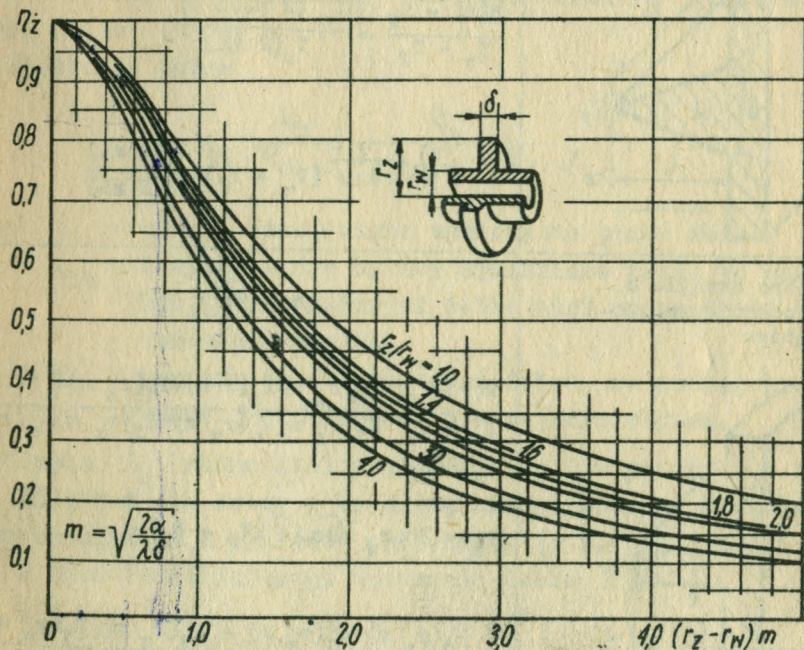
5.4, albo też dla żeber o bardziej skomplikowanym kształcie można skorzystać z wykresów sprawności (rys. 5.1, 5.2, 5.3,

5.4) i wzoru definiującego sprawność żebra η_z .

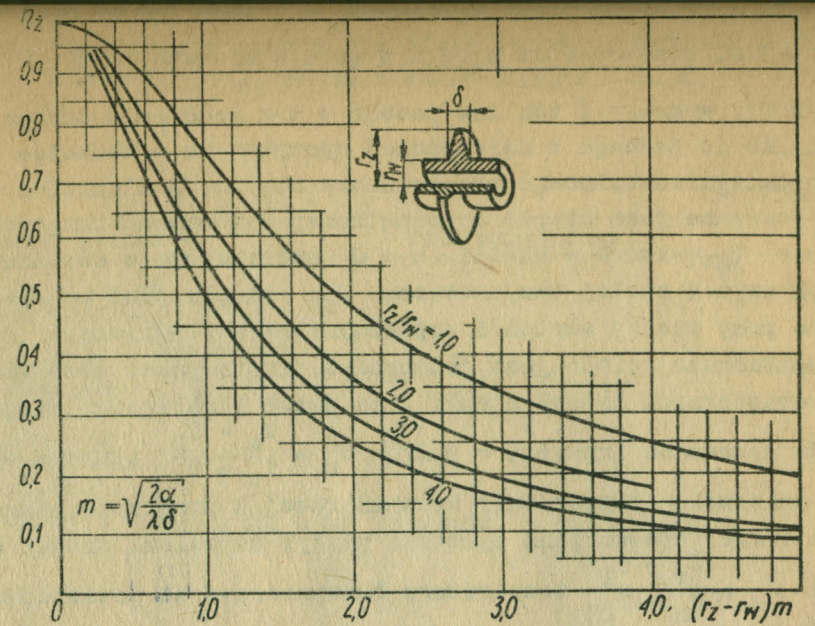
Rodzaj żebra	Pole temperatur i ciepło przewodzone
<p>1. Żebro proste o przekroju prostokątnym</p> 	$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}$ $\frac{T(x) - T_f}{T_w - T_f} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ $Q_h = b \sqrt{2\alpha\lambda\delta} (T_w - T_f) \operatorname{tgh}(mL)$
<p>2. Żebro proste o przekroju trójkątnym</p> 	$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}$ $\frac{T(x) - T_f}{T_w - T_f} = \frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}$ $Q_h = b \sqrt{2\alpha\lambda\delta} (T_w - T_f) \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
<p>3. Żebro okrągłe o przekroju prostokątnym</p> 	$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}}$ $\frac{T(r) - T_f}{T_w - T_f} = \frac{K_1(r_z m) I_0(r m) + I_1(r_z m) K_0(r m)}{K_1(r_z m) I_0(r_w m) + I_1(r_z m) K_0(r_w m)}$ $Q_h = 2\pi r_w \sqrt{2\alpha\lambda\delta} (T_w - T_f) x$ $x = \frac{I_1(r_z m) K_1(r_w m) - K_1(r_z m) I_1(r_w m)}{I_1(r_z m) K_0(r_w m) + K_1(r_z m) I_0(r_w m)}$



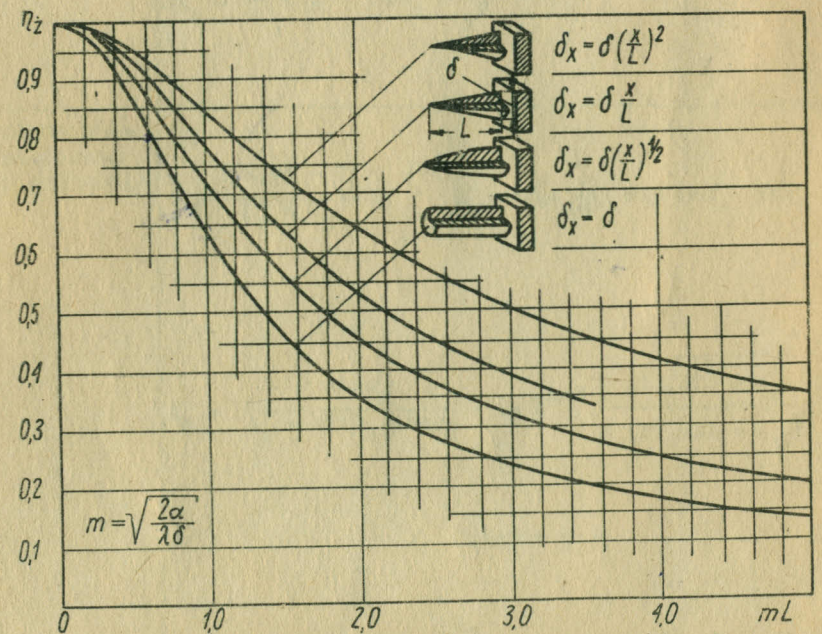
Rys.5.1. Sprawność żeber prostych według Gardnera



Rys.5.2. Sprawność żeber okrągłych o przekroju prostokątnym według Gardnera



Rys.5.3. Sprawność żeber okrągłych o przekroju trapezowym według Gardnera



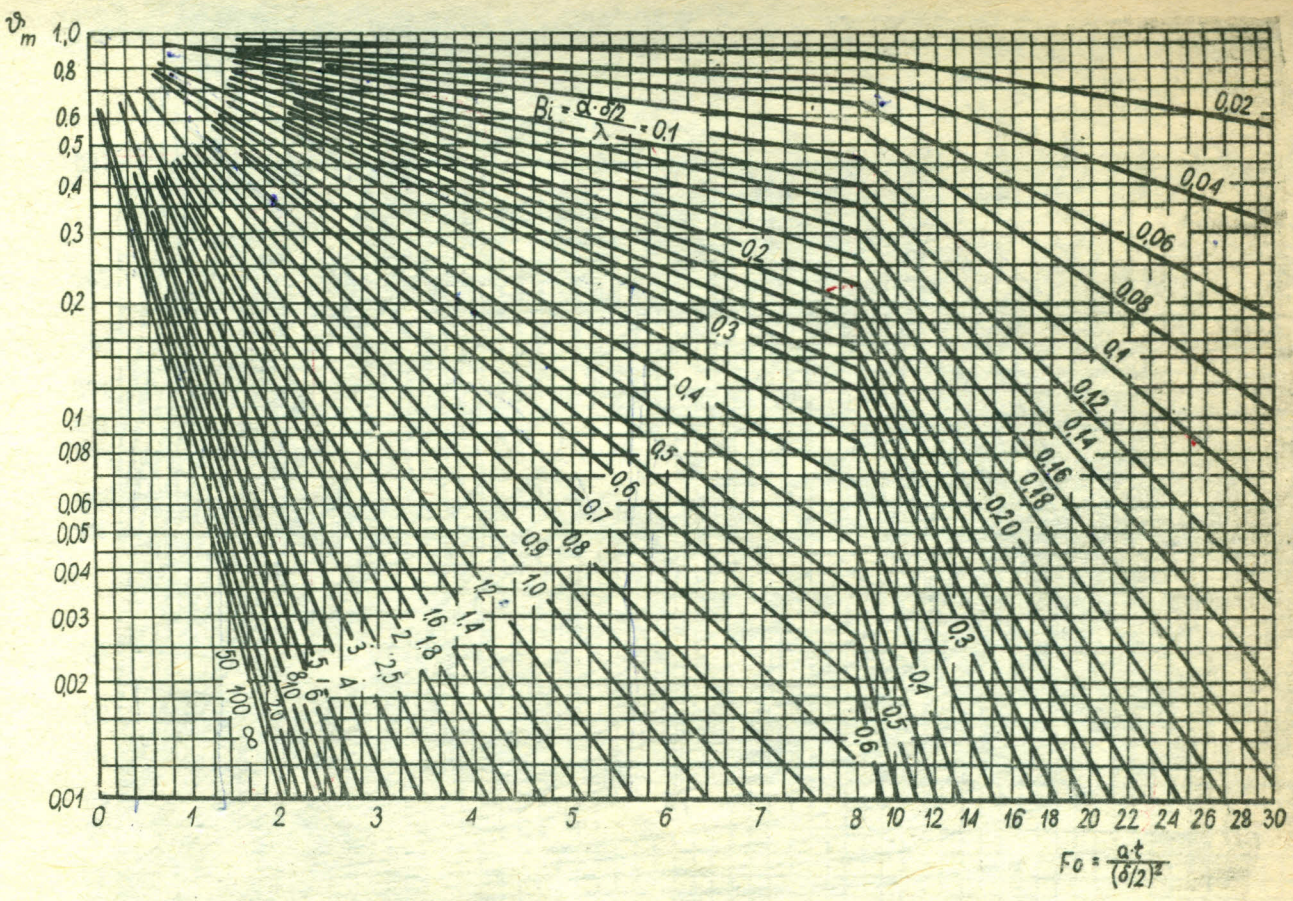
Rys.5.4. Sprawność żeber kołkowych o różnych przekrojach według Gardnera

5.2. Przewodzenie ciepła w stanie nieustalonym

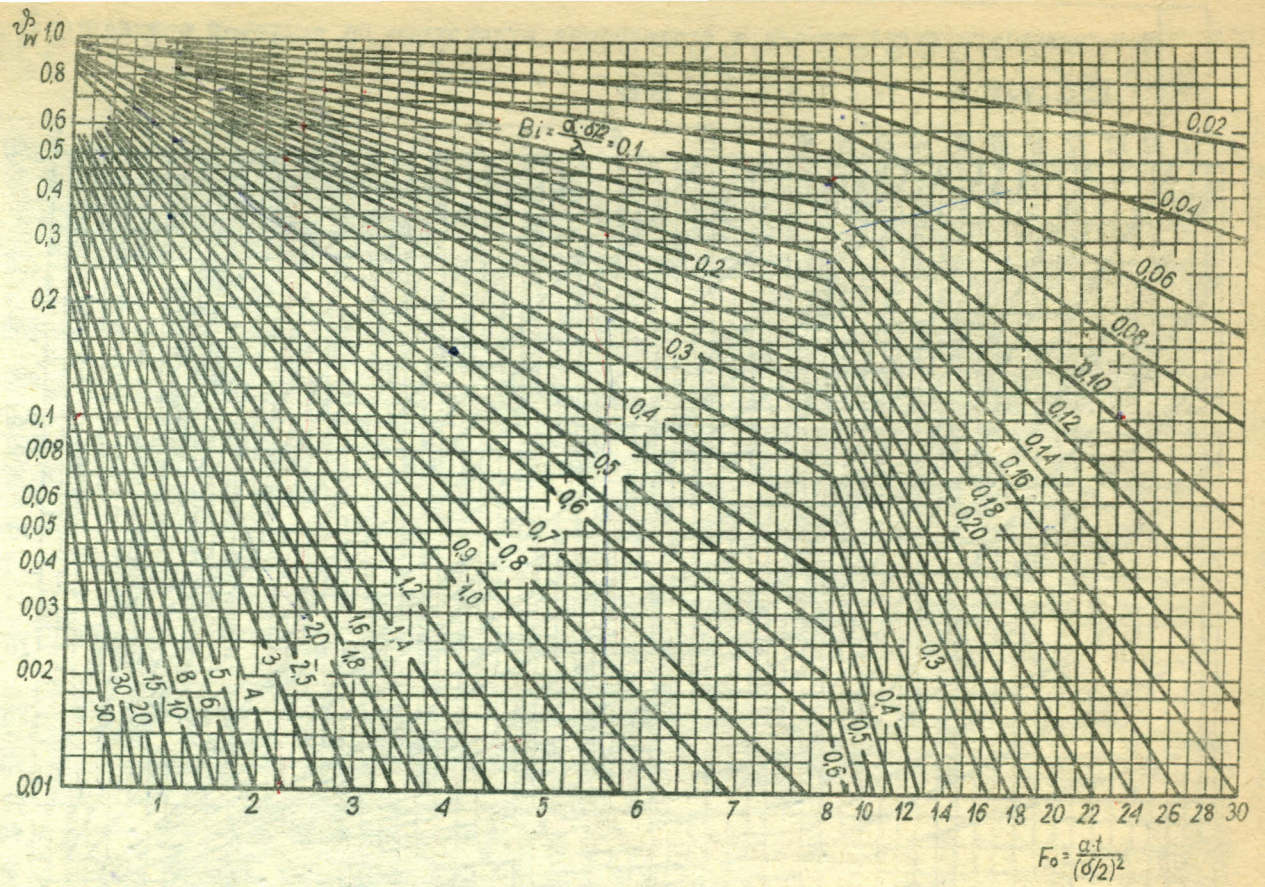
Wzory, wykresy i tablice podane w tym rozdziale odnoszą się tylko do jednego z najczęściej spotykanych w technice przypadków nieustalonego przewodzenia ciepła, a mianowicie:

rozważane jest ciepło o początkowej wyrównanej temperaturze T_0 , które w chwili $t = 0$ umieszczono w ośrodku płynnym o stałej temperaturze T_f ; ciepło jest przejmowane przy stałej wartości współczynnika α ; ogrzewane (lub ochładzane) ciało jest jednorodne, izotropowe, pozbawione wewnętrznych źródeł ciepła i ma stałe właściwości cieplne.

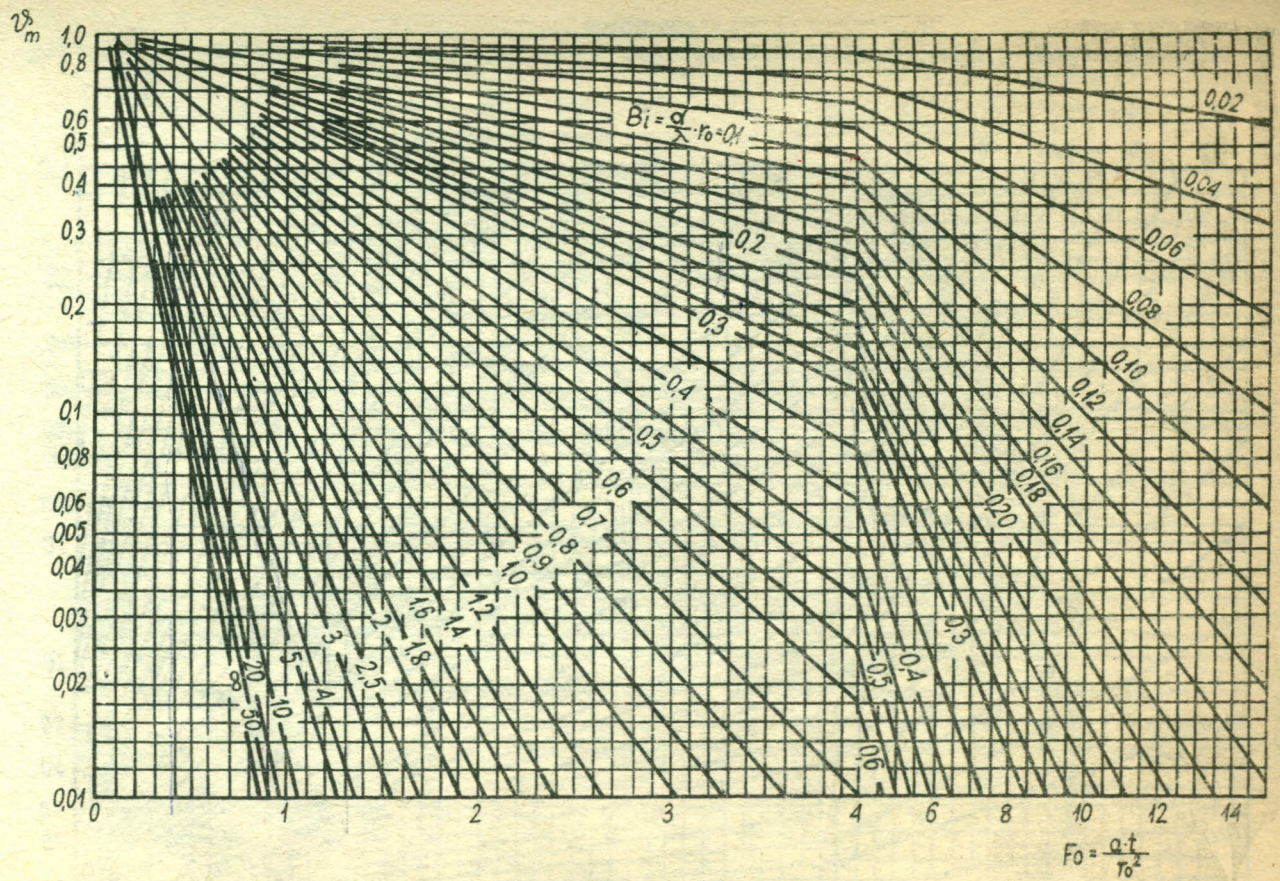
Na wykresach (rys. 5.5 ÷ 5.22) $\psi_m = \frac{T_m - T_f}{T_0 - T_f}$ oznacza wartość maksymalną temperatury bezwymiarowej w przekroju poprzecznym ciała (płaszczyzna symetrii płyty, oś walca, środek kuli) a $\psi_w = \frac{T_w - T_f}{T_0 - T_f}$ temperaturę bezwymiarową na powierzchni ciała.



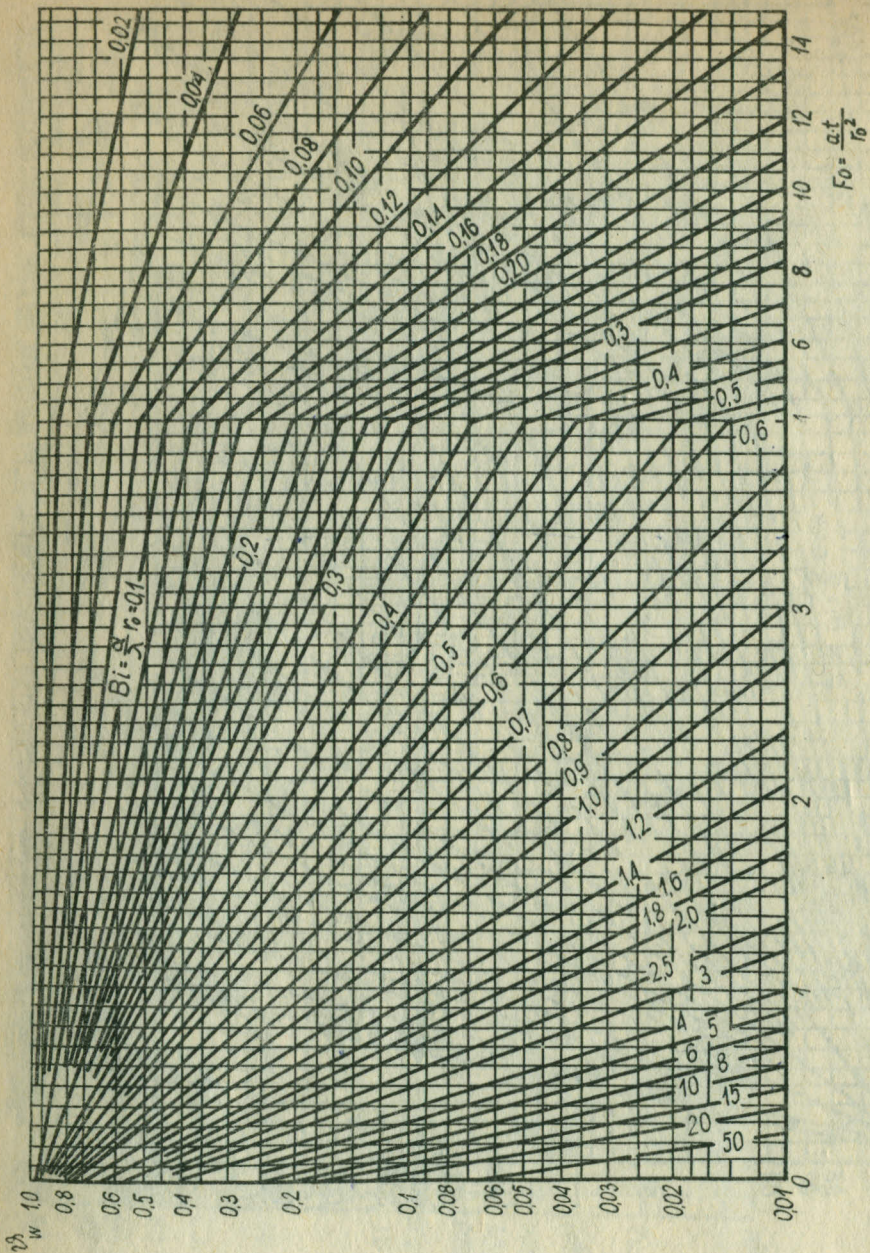
Rys.5.5. Wykres Heislera do obliczania temperatury w środku płyty nieskończonej



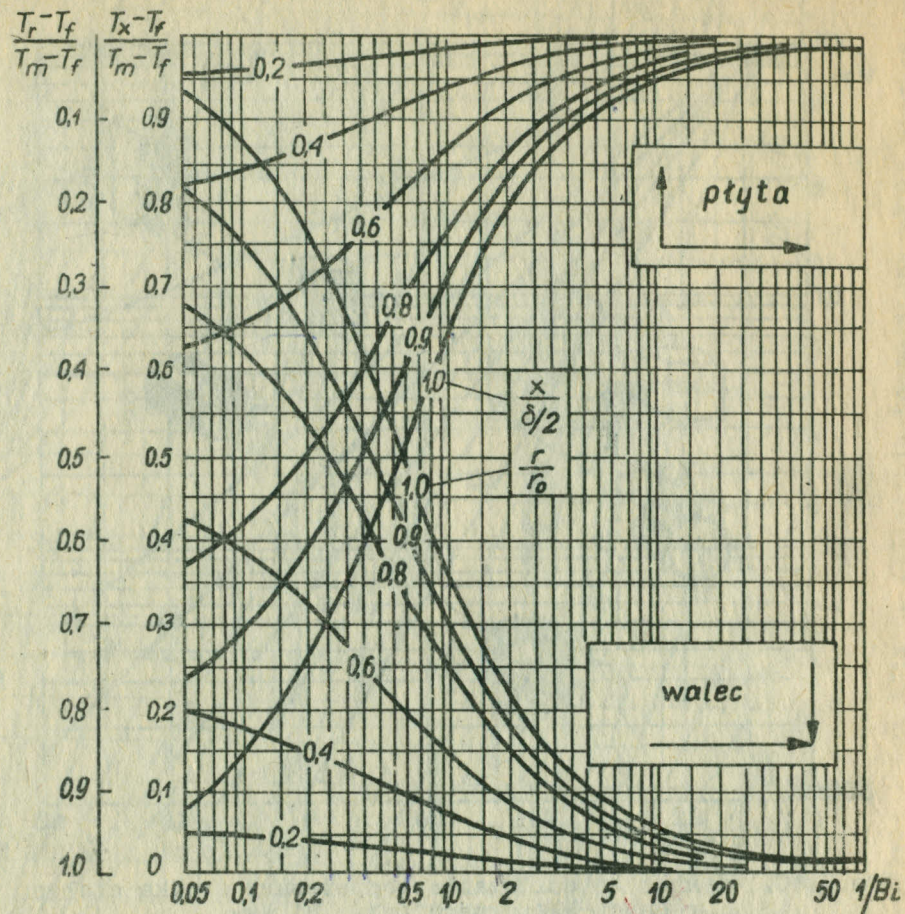
Rys.5.6. Wykres Heislera do obliczania temperatury na powierzchni płyty nieskończonej



Rys.5.7. Wykres Heislera do obliczania temperatury w środku walca nieskończonego

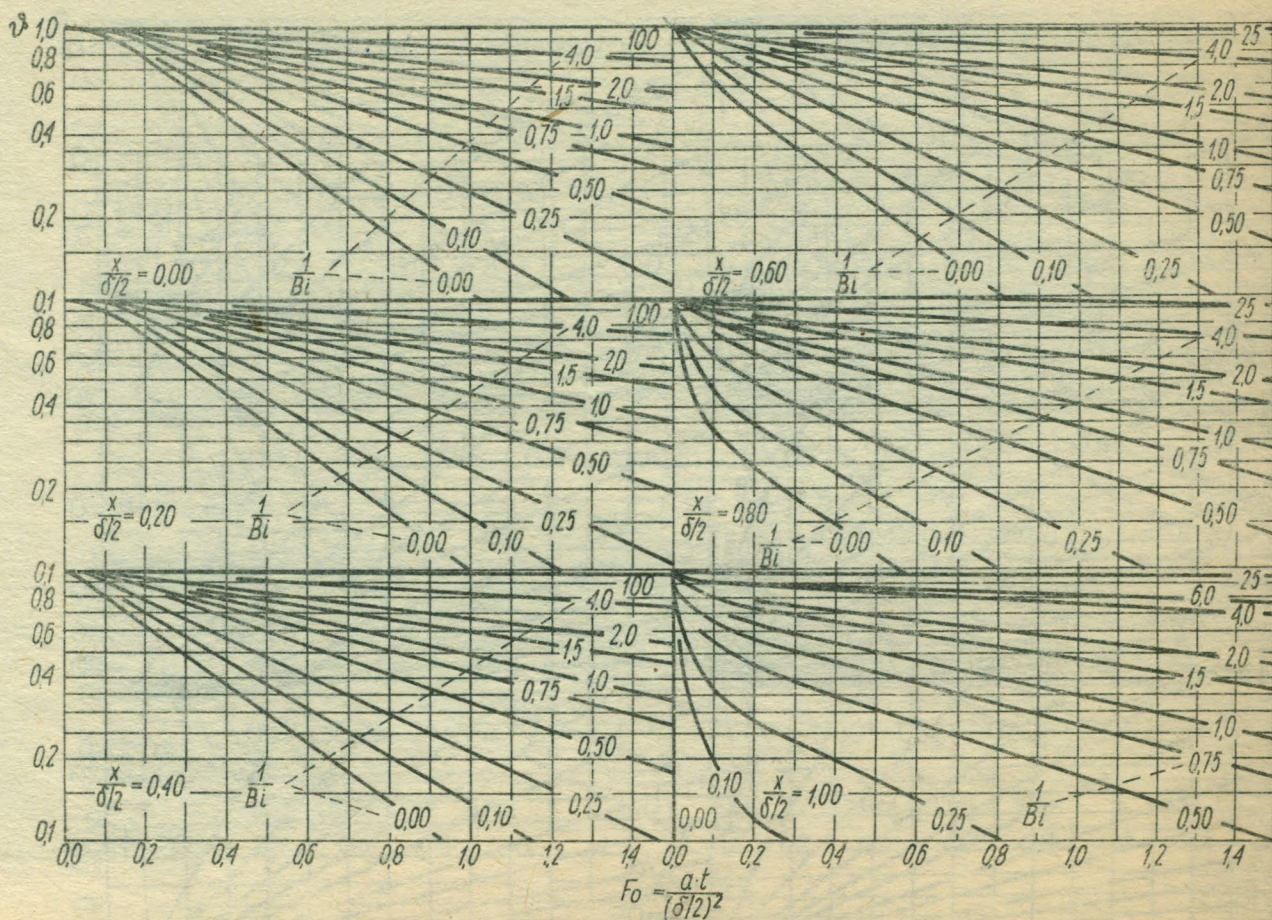
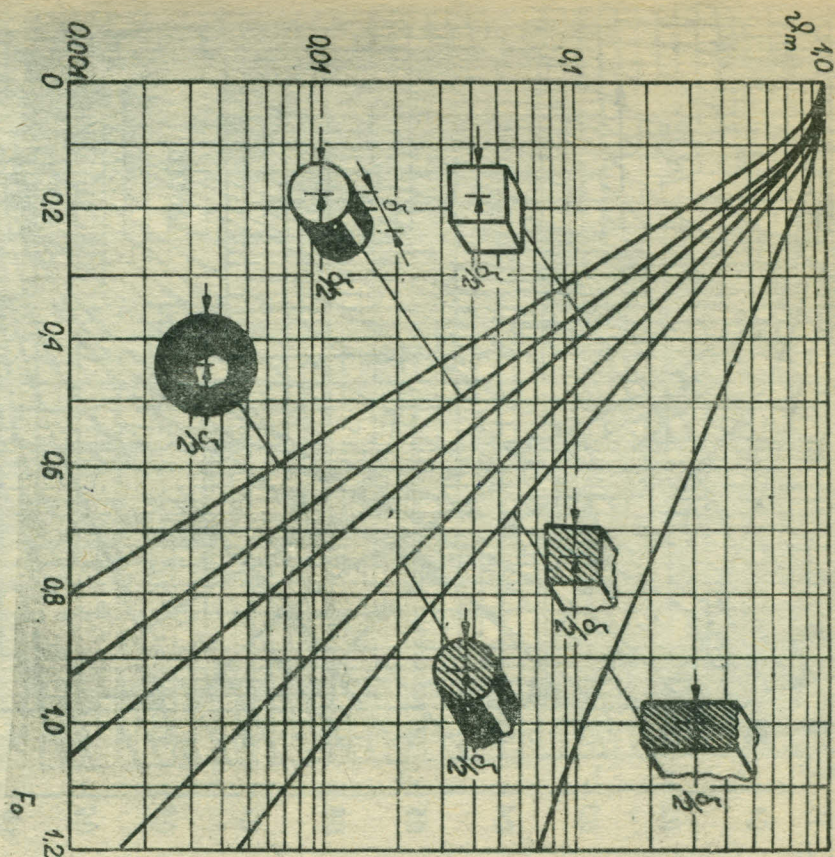


Rys.5.8. Wykres Heislera do obliczania temperatury na powierzchni walca nieskończonego

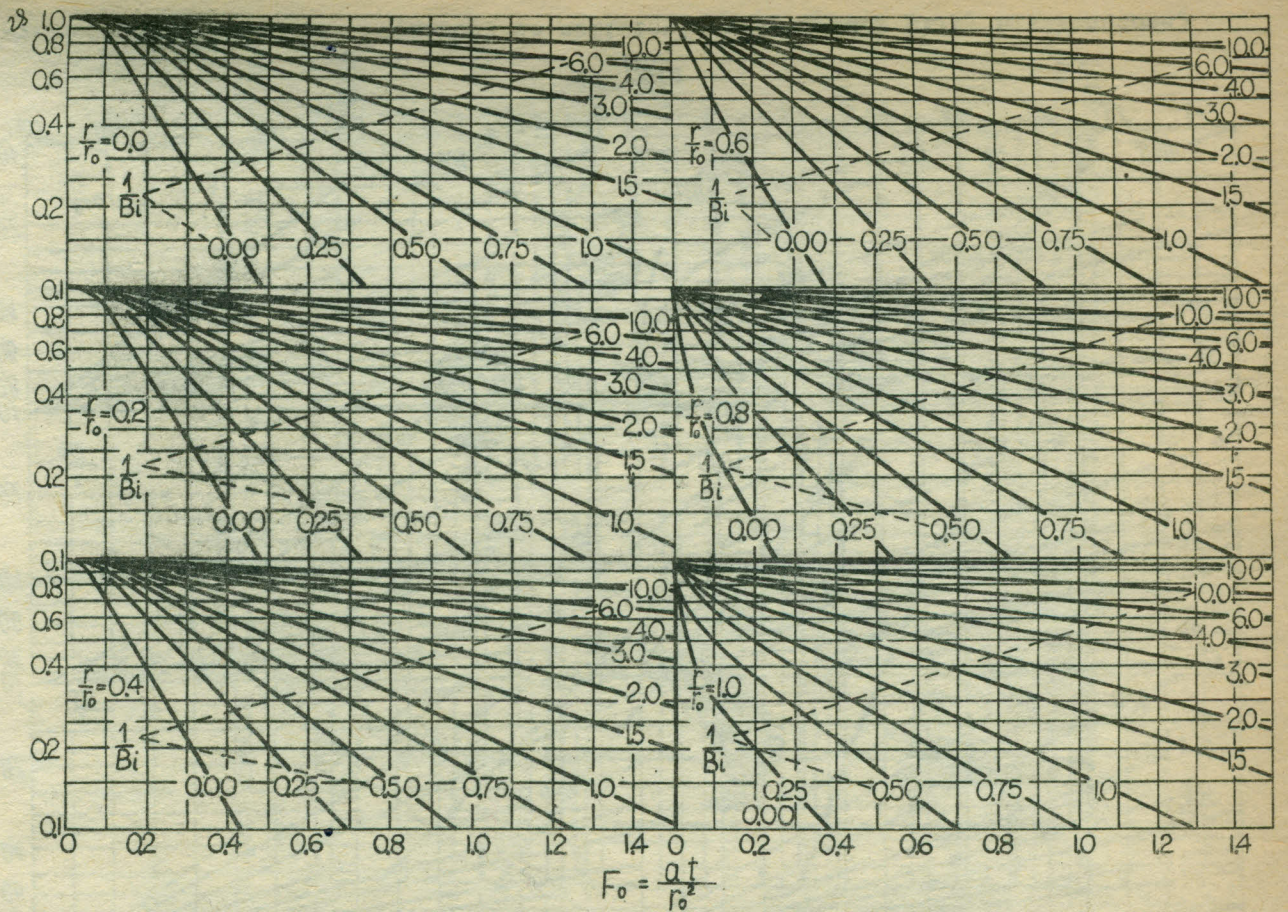


Rys.5.9. Wykres do obliczania temperatury w dowolnym punkcie płyty nieskończonej i walca nieskończonego według Heislera (tylko dla dużych wartości \$Fo\$)

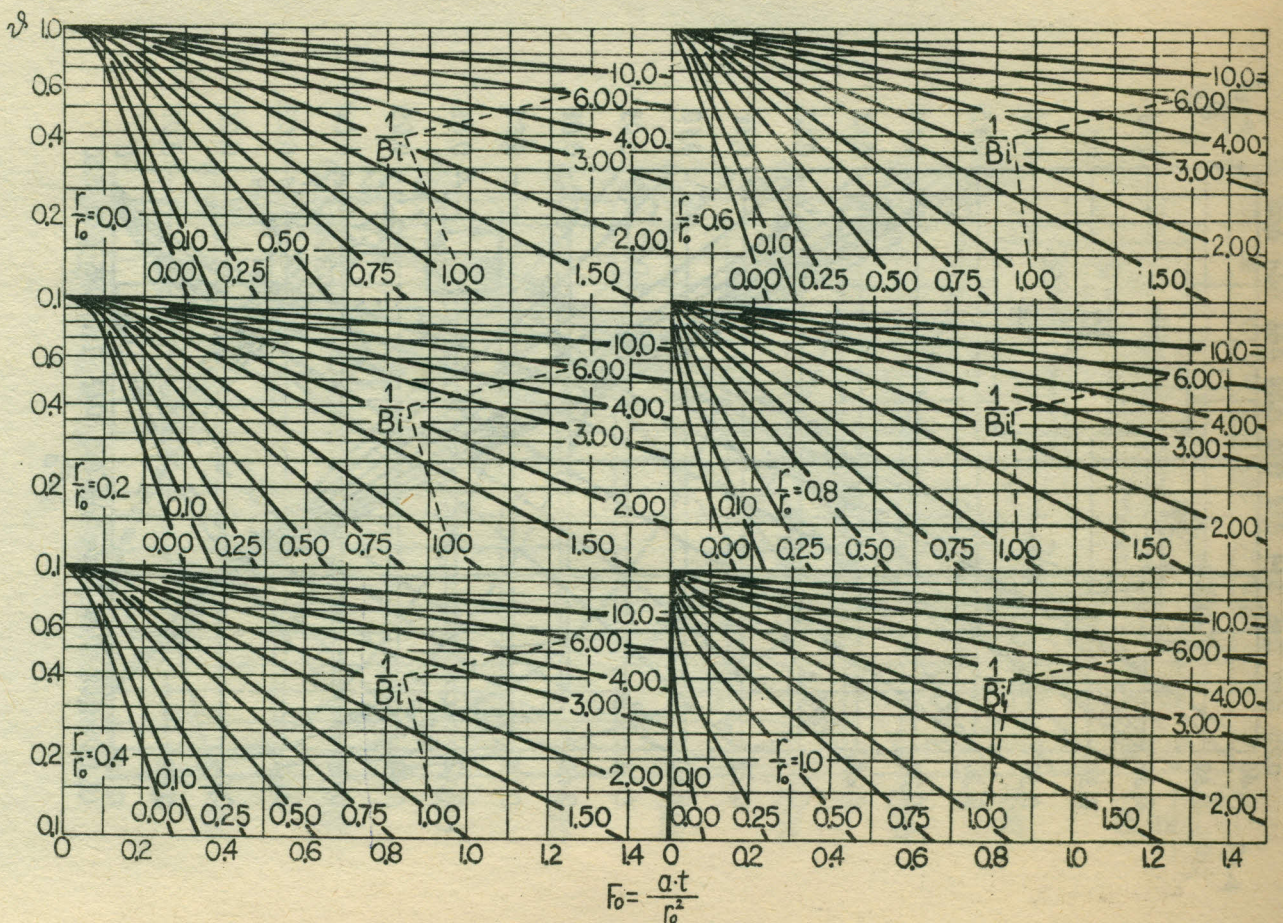
Rys.5.10. Wykres do obliczania temperatury środka ciał o różnych kształtach przy $Bi = \infty$



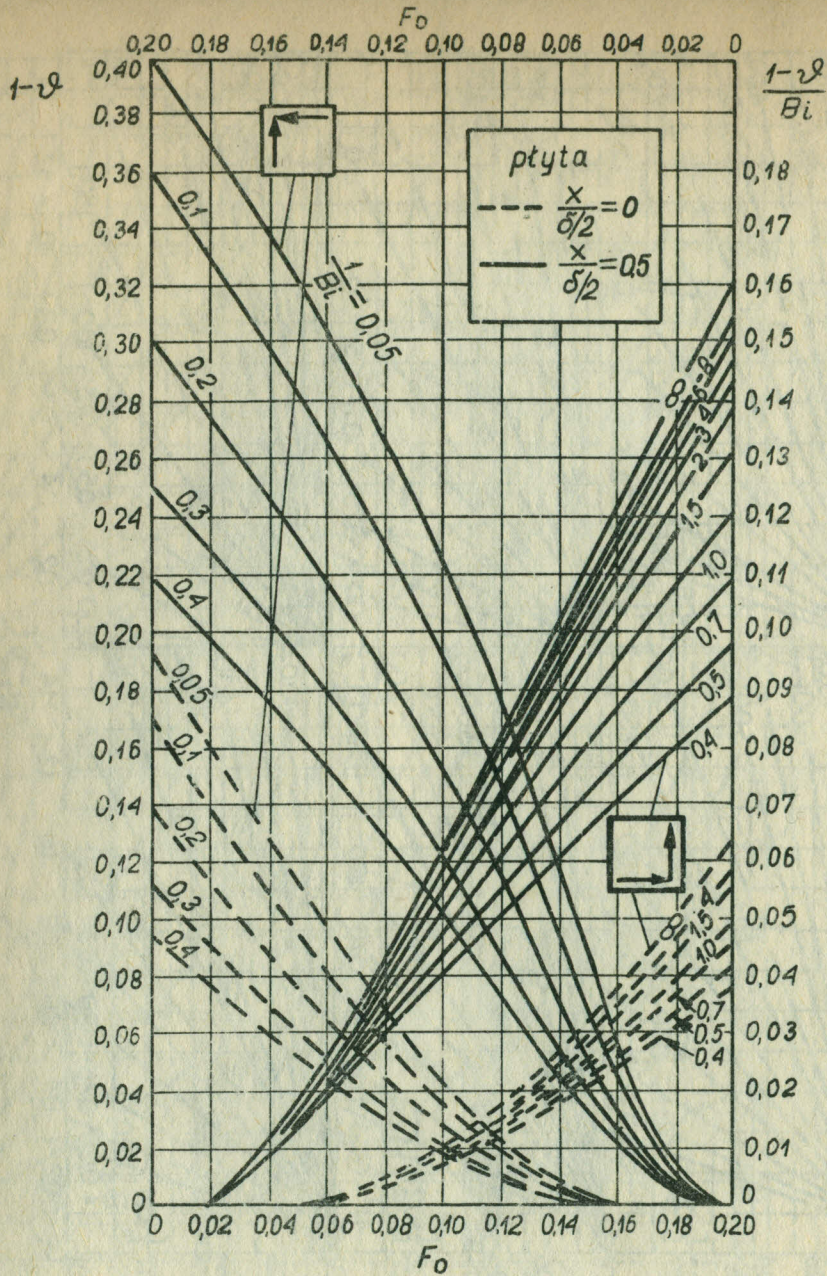
Rys.5.11. Wykres Boeltera i Johnsona do obliczania temperatury płyty nieskończonej



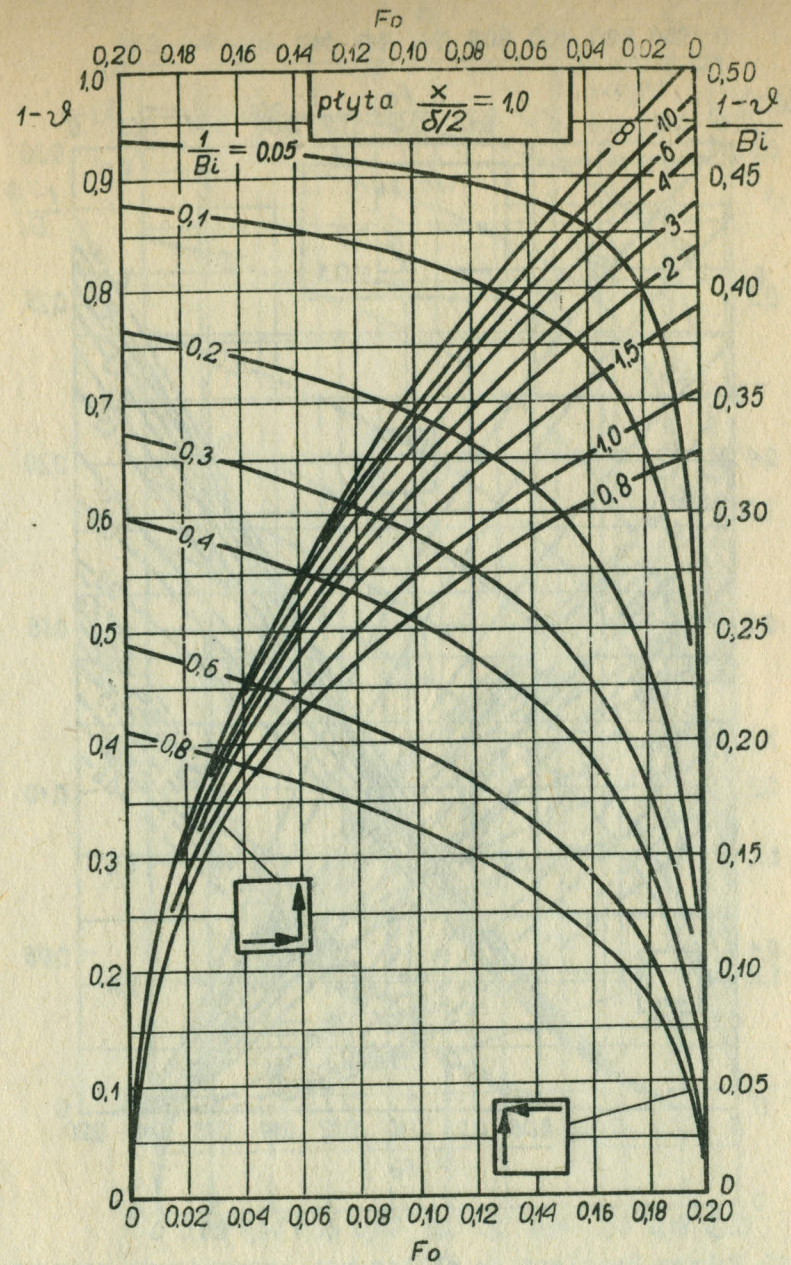
Rys.5.12. Wykres Boeltera i Johnsona do obliczania temperatury walca nieskończonego



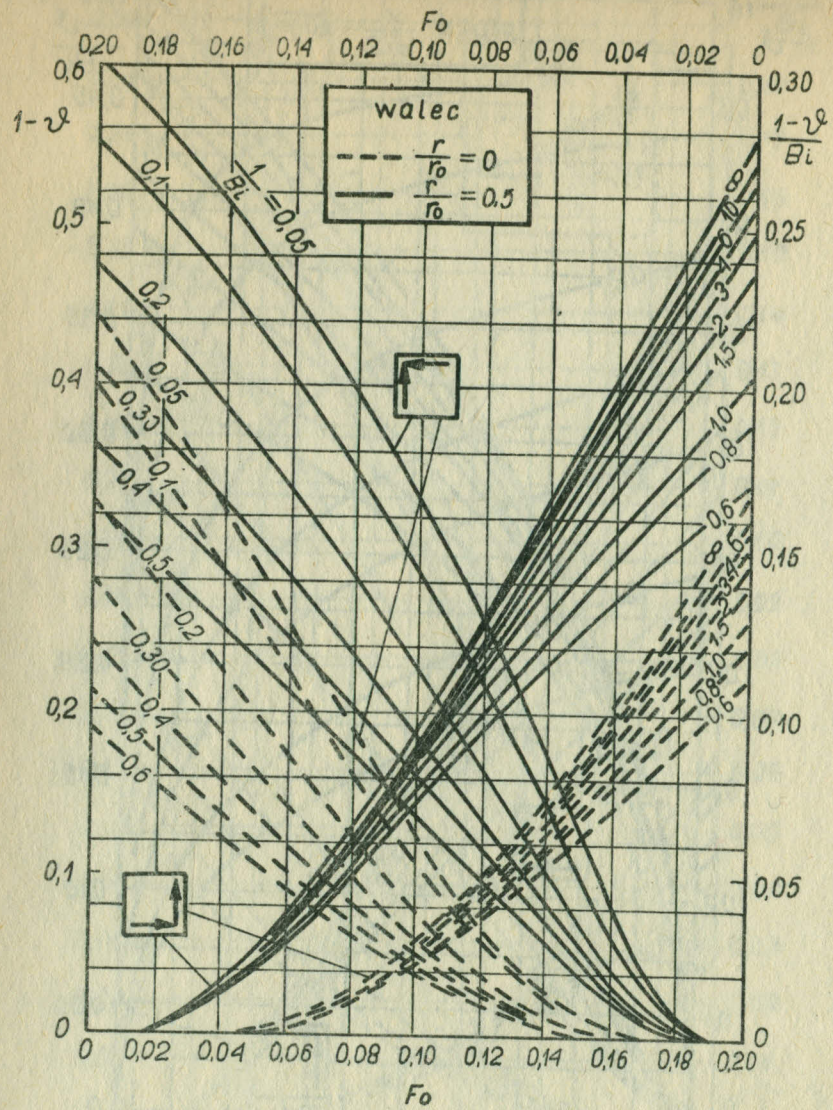
Rys.5.13. Wykres Boeltera i Johnsona do obliczania temperatury kuli



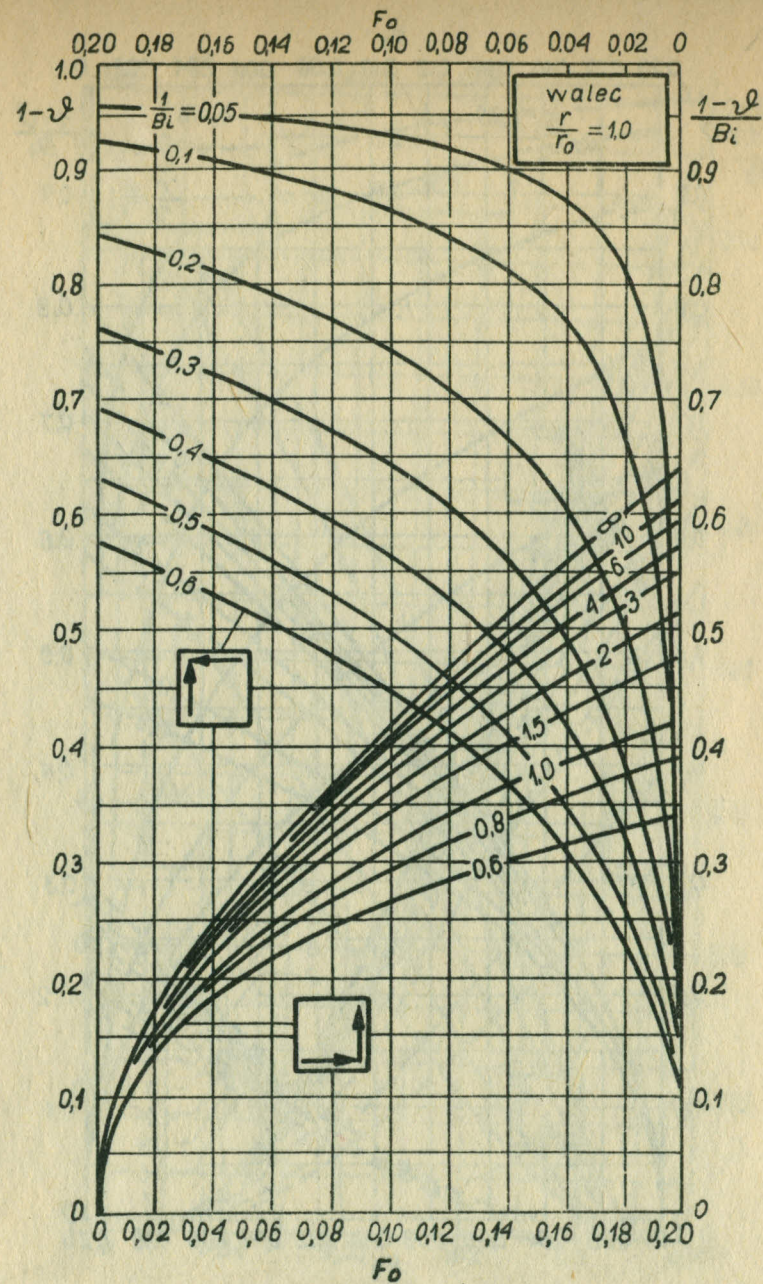
Rys.5.14. Wykres Heislera do obliczania temperatury wewnątrz płyty nieskończonej dla małych wartości liczb Fouriera



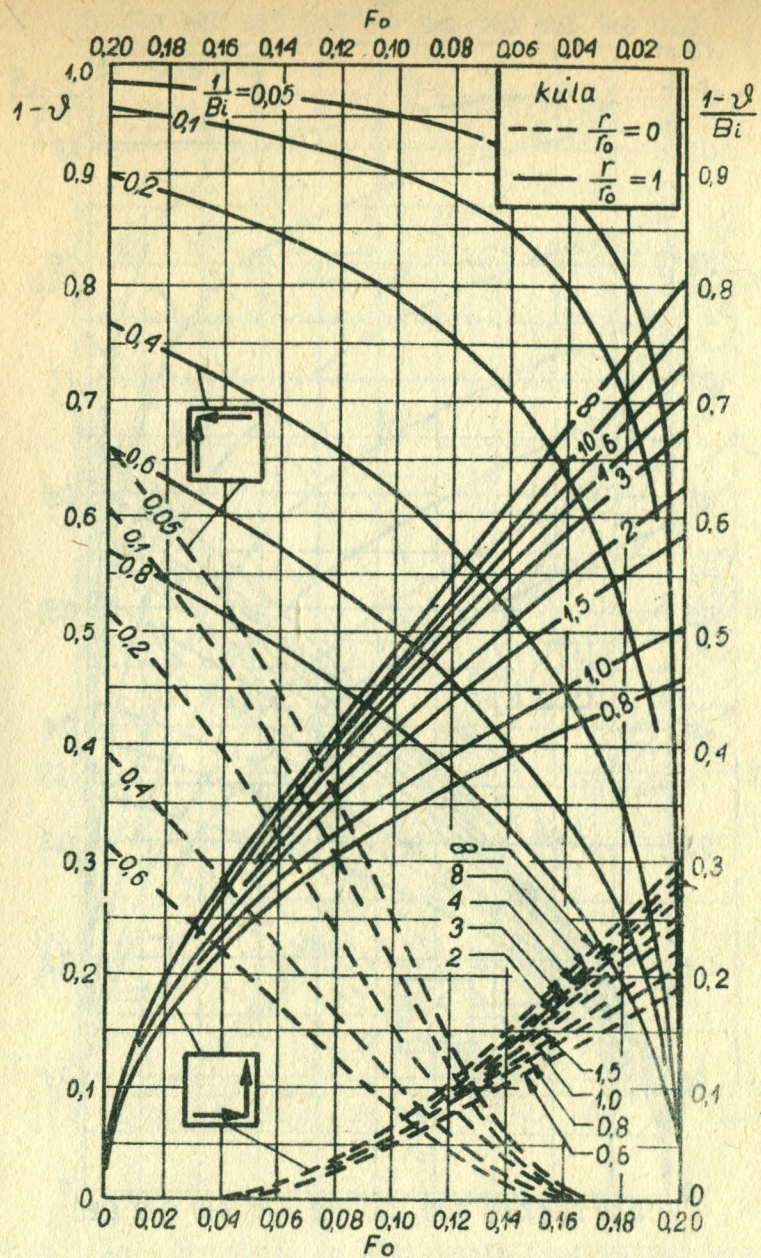
Rys.5.15. Wykres Heislera do obliczania temperatury powierzchni płyty nieskończonej dla małych wartości liczb Fouriera



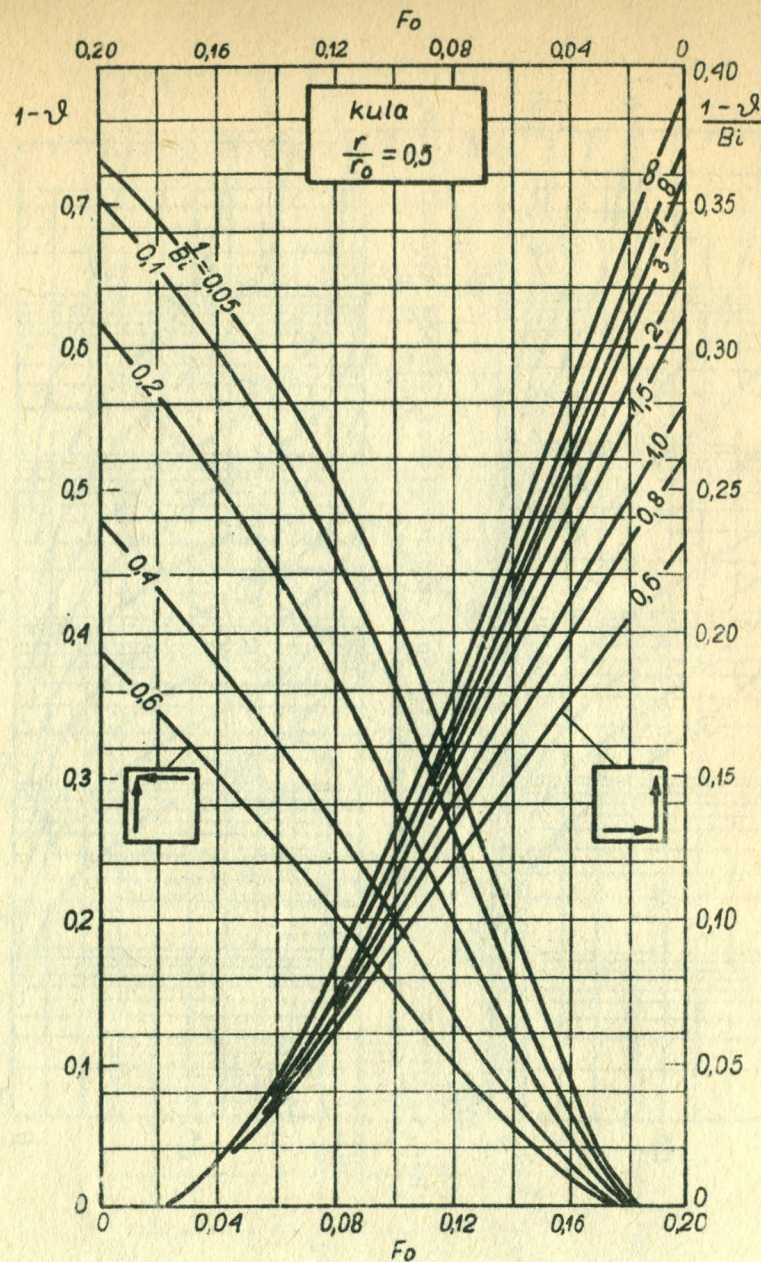
Rys.5.16. Wykres Heislera do obliczania temperatury wewnątrz walca nieskończonego dla małych wartości liczb Fouriera



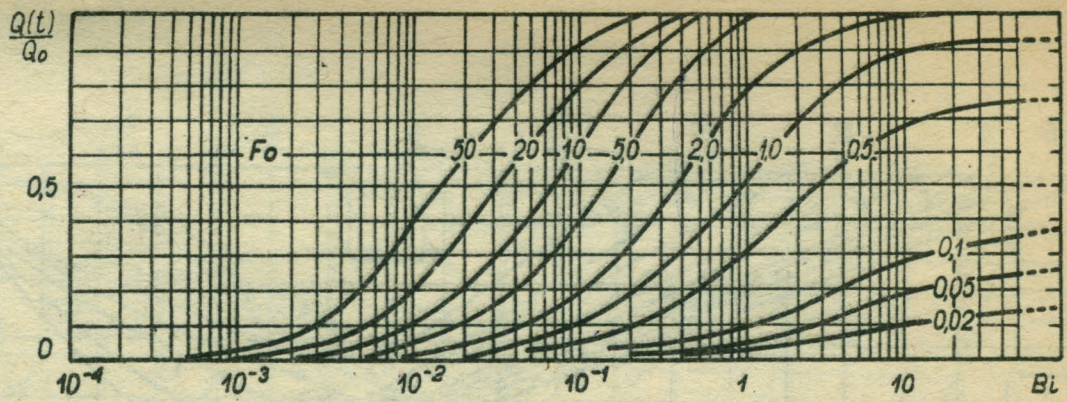
Rys.5.17. Wykres Heislera do obliczania temperatury powierzchni walca nieskończonego dla małych wartości liczb Fouriera



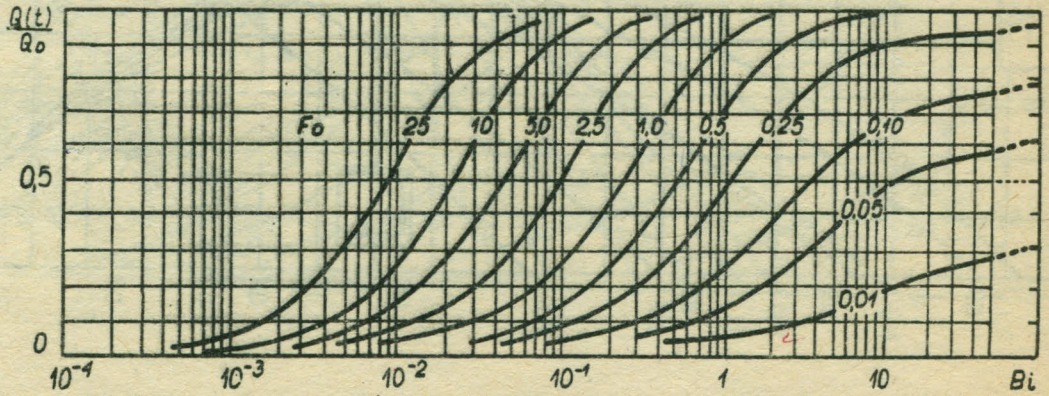
Rys.5.18. Wykres Heisléra do obliczania temperatury środka i powierzchni kuli dla małych wartości liczb Fouriera



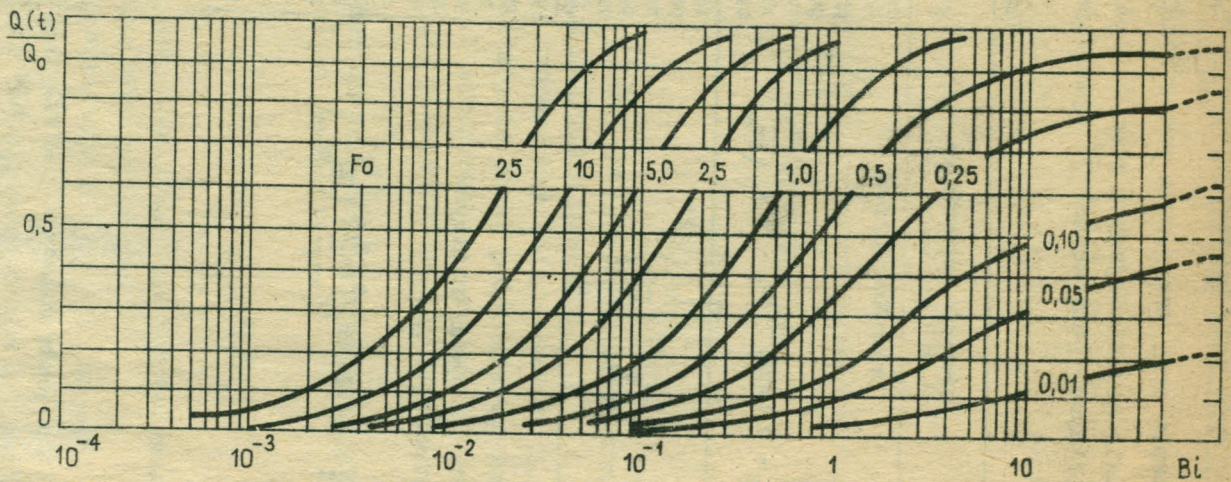
Rys.5.19. Wykres Heisléra do obliczania temperatury wewnątrz kuli dla małych wartości liczb Fouriera



Rys.5.20. Wykres Gröbera i Erka do obliczania ilości ciepła wymienianego na powierzchni płyty nieskończonej $Q_0 = \delta c \rho (T_0 - T_f)$



Rys.5.21. Wykres Grobera i Erka do obliczania ilości ciepła wymienianego na powierzchni walca nieskończonego $Q_0 = \pi r_0^2 c \rho (T_0 - T_f)$



Rys.5.22. Wykres Gröbera i Erka do obliczania ilości ciepła wymienianego na powierzchni kuli. $Q_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 c \rho (T_0 - T_f)$